Disponibile anche in inglese

Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica

From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process

Maria Alessandra Mariotti* e **Andrea Maffia•**
*Università di Siena, Italia
•Università di Bologna, Italia

Sunto / Il potenziale didattico degli artefatti nell'apprendimento è stato ampiamente studiato, focalizzandosi soprattutto sul loro possibile uso da parte degli studenti e sui benefici che ne derivano. Vi è però la tendenza a sottostimare la complessità legata alla piena espressione di tale potenziale, e in particolare l'importanza del ruolo del docente nell'organizzazione del processo d'insegnamento e apprendimento. A partire dall'idea seminale di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij, è stato sviluppato il quadro teorico della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), con l'obiettivo di fornire un modello di insegnamento e apprendimento che pone l'attenzione sul processo semiotico relativo all'utilizzo di artefatti culturali. Assumendo una prospettiva semiotica è possibile analizzare il discorso che si sviluppa nella classe ed evidenziare specifici schemi di azione messi in atto dall'insegnante al fine di far evolvere i significati personali degli studenti verso i significati matematici che sono l'obiettivo dell'intervento didattico. L'articolo presenta un primo modello dell'azione del docente e fornisce alcuni esempi legati ad una sperimentazione didattica a lungo termine svolta a livello della scuola elementare.

Parole chiave: mediazione semiotica; artefatti; potenziale semiotico; ciclo didattico; docente.

Abstract / The didactic potential of artefacts for learning have been extensively studied, with a main focus on their possible use by students and the subsequent benefits for them. However, there has been the tendency to underestimate the complexity of exploiting this potential, and specifically the complexity of the teacher's role orchestrating the teaching and learning process. Following Vygotskij's seminal idea of semiotic mediation, the theoretical framework of Theory of Semiotic Mediation (TSM) has been developed (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) with the aim of providing a teaching and learning model, where attention is focused on the semiotic processes related to the use of cultural artefacts. Through the semiotic lens it is possible to analyse the classroom discourse and highlight specific patterns in the teacher's action that make students' personal meanings evolve towards the mathematical meanings that are the objective of the didactic intervention. The paper presents a first model of the teacher's action and provides some examples drawn from long term teaching experiments carried out at the primary school level.

Keywords: semiotic mediation; artefact; semiotic potential; didactic cycle; teacher.

1 Premessa

Il ruolo principale di un insegnante di matematica è rendere il sapere matematico accessibile ai suoi studenti. Questa missione educativa può essere raggiunta utilizzando vari mezzi e l'uso di strumenti manipolativi costituisce un esempio comune nelle classi elementari. Anche le tecnologie ICT possono servire allo stesso scopo. Questi

strumenti possono però risultare inutili senza un intervento specifico dell'insegnante volto a mediare i contenuti matematici che si intende tramettere nella sequenza didattica progettata.
Lavorando sull'idea seminale di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij (1978), Bartolini Bussi e Mariotti (2008) hanno elaborato un modello atto a descrivere e spiegare il processo che comincia con l'utilizzo da parte degli studenti di uno strumento specifico per svolgere un compito, e porta lo studente all'appropriazione di un particolare concetto matematico. Tale modello considera il tema dell'integrazione di strumenti nella pratica didattica da una prospettiva molto ampia, proponendo un quadro teorico che può includere qualsiasi tipo di artefatto, considerando il suo potenziale didattico rispetto a uno specifico contenuto matematico; inoltre, questo approccio teorico prende esplicitamente in considerazione il ruolo dell'insegnante, offrendo la base per un modello esplicito di quello che ci si aspetta da lui/lei.
In questo contributo, dopo aver presentato le idee chiave del quadro teorico (la Teoria della Mediazione Semiotica, TMS), ci concentreremo sull'azione dell'insegnante, in particolare su come possa utilizzare un artefatto in relazione ai suoi specifici obiettivi educativi.

2 La mediazione in accordo con l'approccio semiotico

Il termine *mediazione* è stato usato frequentemente, con differenti significati non sempre compatibili, in relazione all'utilizzo di artefatti nelle pratiche scolastiche ed è stato abbondantemente preso in considerazione nella letteratura in didattica della matematica (Meira, 1995; Radford, 2003; Noss & Hoyles, 1996; Borba & Villarreal, 2005). Usata soprattutto in relazione al supporto che uno specifico strumento fornisce alla realizzazione di un compito attraverso il suo utilizzo, l'idea di mediazione è stata anche messa in relazione al potenziale di promuovere i processi di apprendimento rispetto a una specifica conoscenza, ad esempio una conoscenza matematica. Spesso tuttavia, la complessità del processo di mediazione non è stata affrontata adeguatamente, come conseguenza dell'aver trascurato il problema epistemologico relativo alla relazione tra lo svolgimento di un compito e i processi di apprendimento matematico dello studente.
Al contrario, questo tema è considerato specificamente dalla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), che elabora la nozione di mediazione combinando una prospettiva semiotica ad una educativa e considera il ruolo cruciale della *mediazione umana* (Kozulin, 2003) nel processo di insegnamento-apprendimento. La TMS fornisce un modello del processo d'insegnamento e di apprendimento sviluppandosi attorno a due elementi chiave: la nozione di potenziale semiotico di un artefatto e la nozione di ciclo didattico. Dopo una breve descrizione di queste due nozioni principali, descriveremo diverse modalità di mediazione che potrebbero essere proposte dall'insegnante per sfruttare il potenziale semiotico di un dato artefatto durante la fase collettiva di un ciclo didattico.

3 Il potenziale semiotico di un artefatto

La relazione tra una conoscenza matematica e l'utilizzo di uno strumento specifico ha una lunga storia: il caso della riga e del compasso è probabilmente il più rappresentativo. È un dato di fatto che, osservando l'utilizzo di uno specifico strumento, un esperto può essere portato a richiamare una specifica nozione matematica. Secondo Hoyles (1993), ci si può riferire alla relazione tra artefatto e conoscenza come *conoscenza evocata*. Per esempio, la notazione posizionale e la scrittura polinomiale dei numeri possono essere evocate dall'abaco e dal suo utilizzo; allo stesso modo, per un matematico, un software di geometria dinamica può evocare la geometria classica, ovvero la geometria con "riga e compasso".

Figura 1
Un compasso e un bicchiere con una matita.

Consideriamo gli strumenti di Figura 1: il primo è il conosciutissimo compasso, mentre il secondo è la combinazione di un bicchiere e una matita. Quando vengono utilizzati per disegnare, entrambi gli strumenti producono una traccia circolare (un cerchio), e per questa ragione, entrambi possono essere messi in relazione, e quindi evocare, la nozione matematica di cerchio. Ciò nonostante, malgrado il prodotto finale sia lo stesso, se li confrontiamo in relazione ai gesti compiuti, possiamo osservare che la procedura seguita è completamente differente ed evoca proprietà geometriche piuttosto diverse.
Secondo Rabardel (1995), possiamo distinguere tra l'oggetto stesso – l'artefatto – e la procedura che viene utilizzata per svolgere il compito – lo schema d'uso. Considerando la combinazione di un artefatto e il suo schema d'uso possiamo identificare conoscenze matematiche specifiche che possono essere evocate dall'utilizzo dello specifico artefatto.
Nel caso della combinazione di un bicchiere e una matita, lo schema di utilizzo si concentra sul movimento circolare della mano che tiene la matita; questo porta alla regolarità della forma specifica, regolarità che per un esperto può evocare la proprietà geometrica di curvatura costante; nel caso del compasso, lo schema di utilizzo si concentra sulla presenza del punto particolare dove è fissato l'ago della prima asta, sull'allargamento delle due aste e sulla costanza di tale allargamento nel tracciare la forma rotonda. Per un esperto, tutto questo può evocare la nozione di *centro*, la nozione di *raggio* e la proprietà di costanza della distanza tra il centro e un qualsiasi punto sulla circonferenza.
È chiaro che a seconda di quale dei due artefatti viene utilizzato, vengono evocati si-

gnificati matematici diversi (Chassapis, 1998); in altre parole possiamo dire che i due artefatti hanno *potenziali semiotici* differenti. In generale, definiamo il *potenziale semiotico di un artefatto* come la doppia relazione che può istaurarsi tra un artefatto, i significati personali che emergono dal suo utilizzo per svolgere un compito (attività strumentale) e i significati matematici evocati dal suo utilizzo e riconoscibili come matematica da un esperto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).
Un'analisi a priori, che coinvolga allo stesso tempo una prospettiva cognitiva ed una prospettiva epistemologica, può portare ad identificare il *potenziale semiotico* di un artefatto.
La progettazione di qualsiasi progetto pedagogico (sequenza d'insegnamento-apprendimento) centrato sull'utilizzo di un dato artefatto deve basarsi su una descrizione a priori del potenziale semiotico dell'artefatto; esempi ispirati all'uso di artefatti classici del passato possono essere quelli relativi all'abaco (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 759 ff.) e al prospettografo (Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005).

4 Il ciclo didattico

Riportiamo di seguito le fasi del ciclo didattico (**Figura 2**):

Figura 2
Il ciclo didattico.

L'identificazione del potenziale semiotico di un dato artefatto costituisce l'antefatto necessario al suo utilizzo in classe, ciò nonostante l'efficacia del suo utilizzo dipende da un'attenta progettazione dell'intervento didattico. Una volta che un'analisi cognitiva ed epistemologica ha prodotto una sequenza di possibili compiti, è necessaria un'opportuna organizzazione didattica di questi compiti, accompagnata da un'appropriata gestione delle attività in classe da parte del docente. Assumere una prospettiva semiotica significa focalizzarsi sulla produzione di segni e sul processo di trasformazione di questi segni, considerando questa trasformazione come una evidenza dell'apprendimento. In altre parole, secondo la TMS, riconosciamo un ruolo centrale nei segni[1], sia come prodotti, sia come mezzi, e interpretiamo la costruzione 1

1. L'utilizzo del termine *segni* è ispirato da Pierce. Assumiamo una relazione indissolubile tra il significato e il significante. Sulla corrente di altri ricercatori (Radford, 2003; Arzarello, 2006) abbiamo sviluppato un'idea di significato originato dall'interazione intricata dei segni (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008): per una riflessione approfondita si veda (Sfard, 2000, p. 42 e seguenti).

di un sapere come l'evoluzione di una conoscenza da significati radicati nell'uso dell'artefatto verso significati esplicitamente riconosciuti come coerenti con i significati matematici: partendo dall'*emergere del potenziale semiotico*, testimoniato dalla produzione da parte degli studenti di specifici segni, il cui significato si riferisce principalmente all'utilizzo dell'artefatto *(segni artefatto)*, l'intervento attivo del docente promuoverà la loro evoluzione verso i segni matematici attesi. L'intera struttura di una sequenza didattica può essere delineata come l'iterazione di *cicli didattici*, progettati per *sfruttare il potenziale semiotico dell'artefatto*. Ogni ciclo è costituito da attività specifiche, ognuna delle quali contribuisce differentemente, ma in maniera complementare, allo sviluppo del complesso processo di mediazione semiotica.
Riassumendo, il *processo di mediazione semiotica* consiste nell'evoluzione che parte dall'emergere di significati personali relativi alla risoluzione di un compito e si compie nello sviluppo/ costruzione collettiva di segni condivisi relativi sia all'utilizzo dell'artefatto, sia alla matematica da apprendere. È possibile progettare una sequenza di cicli didattici con lo scopo di sostenere tale evoluzione; le differenti attività proposte in ogni ciclo sono classificabili in relazione al loro contributo al processo di mediazione semiotica. Tre diverse categorie di compito costituiscono un ciclo didattico, come descritto di seguito.

Attività con l'artefatto. Queste costituiscono l'inizio di ogni ciclo e si basano sulla richiesta agli studenti di portare a termine un compito che implichi l'utilizzo dell'artefatto, con l'obiettivo di promuovere la produzione di segni (parole, disegni, gesti) il cui significato si riferisca all'utilizzo dell'artefatto, ma che sia anche coerente con le conoscenze matematiche obiettivo dell'intervento didattico.

Attività di produzione individuale di segni. Durante le attività con l'artefatto emerge una produzione spontanea di segni. Per questo vengono proposte diverse attività semiotiche, chiedendo produzioni ed elaborazioni di segni individuali, in relazione alla fase precedente. Un ruolo cruciale è giocato dai testi scritti, perché per loro natura e al contrario di altri segni, come i gesti, i segni scritti (e in particolare le parole) cominciano a distaccarsi dalla contingenza dell'azione situata. Inoltre, le produzioni scritte possono diventare oggetto di discussione nel seguente lavoro collettivo.

Discussioni collettive. Questo tipo di attività gioca un ruolo essenziale nel processo d'insegnamento-apprendimento e costituisce il fulcro del processo di mediazione semiotica. L'intera classe è coinvolta: vengono discusse varie soluzioni in modo collettivo, vengono analizzati insieme e in seguito commentati ed elaborati i testi degli studenti o altri testi. Gli interventi degli studenti sono orchestrati dal docente con l'obiettivo di favorire l'evoluzione verso significati matematici, sfruttando il potenziale semiotico che deriva dall'utilizzo del particolare artefatto.

5 Il ruolo del docente nello sviluppo del processo di mediazione semiotica

La prospettiva della mediazione semiotica mette in evidenza che l'artefatto non solo è utilizzato in classe dagli studenti per risolvere un compito, ma che è anche utilizza-

to dal docente per svolgere il suo compito didattico, per raggiungere i propri obiettivi educativi. In questo senso, l'artefatto è una risorsa per il docente che lo utilizza come «strumento di mediazione semiotica» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 754).
In ogni fase del ciclo didattico il docente ricopre un ruolo cruciale. Il suo intervento comprende

– l'ideazione di compiti atti a favorire l'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto scelto;
– l'analisi delle soluzioni e delle sintesi scritte dagli studenti dopo lo svolgimento del compito, identificando l'emergere dei segni attesi;
– la progettazione di discussioni collettive sulla base dei risultati delle precedenti analisi;
– la gestione della discussione collettiva favorendo l'evoluzione dei significati personali degli studenti verso i segni matematici desiderati.

Alcune delle azioni dell'insegnante appena descritte riguardano la progettazione degli interventi didattici, mentre altre riguardano la loro messa in atto; alcune riguardano le attività collettive svolte in classe mentre altre le attività individuali.
Nelle sezioni seguenti ci concentreremo sulle azioni dell'insegnante relative alle attività collettive, specialmente quelle volte a indirizzare la discussione di classe con l'obiettivo di promuovere lo sviluppo del processo di mediazione semiotica.

5.1 L'evoluzione del discorso matematico in classe

Coerentemente ad un approccio Vygotskiano, interpretiamo il processo di insegnamento e apprendimento come un *processo di internalizzazione*; interpretiamo la costruzione individuale delle conoscenze come uno sforzo collettivo, diretto da processi semiotici correlati alla comunicazione, e che coinvolge la produzione e l'interpretazione di segni, in quello che possiamo chiamare spazio *interpersonale* (Cummins, 1996). Inoltre, mantenendo un'ottica Vygotskiana, al centro della TMS c'è anche la convinzione che il processo semiotico, generando e promuovendo una costruzione sociale del sapere, può essere indirizzato dall'insegnante, il quale può agire in maniera intenzionale per promuovere l'evoluzione del discorso matematico[2] di classe. 2
Numerosi teaching experiment sono stati condotti negli scorsi anni, utilizzando vari artefatti di diversa natura; secondo un approccio design-based, in cui «il design è concepito non solo per soddisfare le esigenze locali, ma per far avanzare un'agenda teorica» (Barab & Squire, 2004, p. 5, traduzione degli autori), un'attenzione speciale è stata dedicata all'analisi delle azioni dell'insegnante nella gestione del processo di evoluzione dei segni (Mariotti, 2001; Cerulli, 2004; Falcade, Laborde & Mariotti, 2004; Falcade, 2006; Mariotti & Maracci, 2010). Queste analisi hanno evidenziato schemi d'azione ricorrenti correlati allo sviluppo efficace dei processi di mediazione semiotica; tali schemi d'azione, infatti, possono essere descritti in riferimento ai principali obiettivi della discussione didattica svolta in un particolare ciclo didattico: promuovere cioè sia l'emergere, sia il condividere dei segni personali degli studenti e la loro evoluzione verso i segni matematici desiderati. La descrizione delle differenti categorie di schemi d'azione verrà fornita in relazione a questi obiettivi.

2. L'utilizzo del termine *discorso matematico* riprende Moschkovich (2003, p. 326, traduzione degli autori). Caratterizzazione: «Il discorso matematico include non solo modi di parlare, agire, interagire, pensare, credere, leggere, scrivere ma anche valori matematici, convinzioni e punti di vista. La partecipazione alle pratiche del discorso matematico può essere intesa in generale come parlare e agire nel modo in cui le persone matematicamente competenti parlano e agiscono quando parlano di matematica».

Di seguito presentiamo una descrizione delle azioni del docente emerse dall'osservazione in classe e caratterizzate da un obiettivo specifico relativo all'evoluzione dei segni attesa; ogni tipo di azione è illustrato da esempi presi da una particolare sperimentazione. Per rendere più comprensibili gli esempi proposti, cominciamo fornendo una descrizione generale dell'intervento didattico.

Una panoramica del teaching experiment

Gli esempi proposti sono presi da teaching experiment realizzati alla scuola elementare. Scopo dell'esperimento era l'introduzione delle proprietà della moltiplicazione in accordo con un approccio relazionale (Maffia, 2017) e l'artefatto su cui era basato l'intervento è la tavola di Laisant (anche conosciuta come *decanomio*). Si tratta di una tabella con righe e colonne formate da caselle di diversa grandezza. Ogni casella di una riga è di un'unità più alta di quelle della riga precedente. Allo stesso modo, ogni casella di una colonna è più larga di quella alla sua sinistra, come mostrato dalla Figura 3. Durante questo intervento a lungo termine, i bambini hanno avuto l'opportunità di esplorare la tabella e di discutere il modo in cui è fatta. Hanno realizzato la loro tabella personale e l'hanno utilizzata per rappresentare moltiplicazioni e determinarne il prodotto. Sono stati in grado di associare ogni casella alla moltiplicazione corrispondente, riconoscendo sia i fattori sia il risultato. La tavola è stata anche utilizzata per introdurre una relazione di equivalenza tra moltiplicazioni attraverso l'equivalenza di rettangoli, verificata attraverso la sovrapposizione di rettangoli di carta realizzati dai bambini.

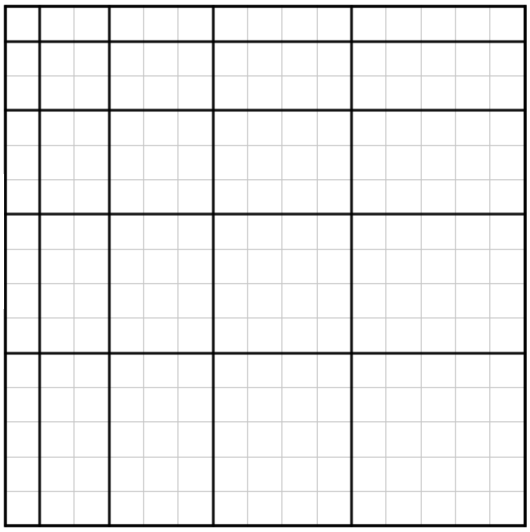

Figura 3
La tavola di Laisant con cinque righe e cinque colonne.

Considerando alcuni compiti che possono essere affrontati utilizzando questo artefatto, possiamo analizzare il suo potenziale semiotico. È possibile produrre rettangoli di carta, tagliarli, manipolarli e incollarli di nuovo. In particolare, i rettangoli possono essere scomposti e ricomposti ottenendo rettangoli con misure differenti rispetto a quelli originali. Queste operazioni mostrano che l'area del rettangolo (che è il risultato dell'operazione) non cambia (Figura 4).

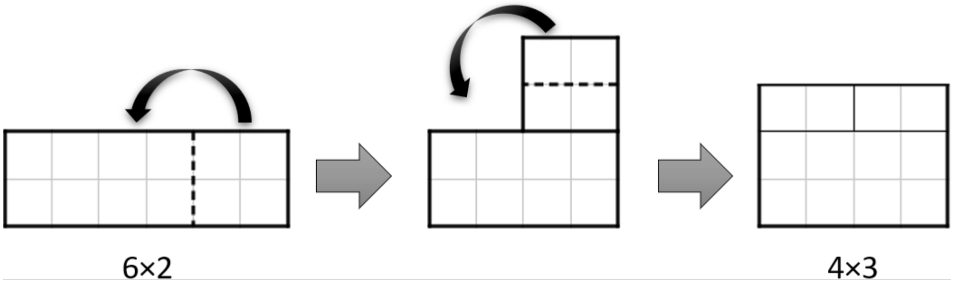

Figura 4
Scomposizione e ricomposizione di rettangoli.

Da un punto di vista matematico «possiamo riconoscere in queste operazioni con i rettangoli il significato di una relazione di equivalenza basata sul fatto che nelle manipolazioni la misura della superficie del rettangolo può conservarsi o meno» (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9). Inoltre, in questa relazione di equivalenza l'esperto può riconoscere il significato matematico di alcune proprietà della moltiplicazione. «Per esempio, la proprietà commutativa del prodotto è riconoscibile nell'invarianza della superficie operando rotazioni che scambiano la posizione dei lati» (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9) (**Figura 5**).

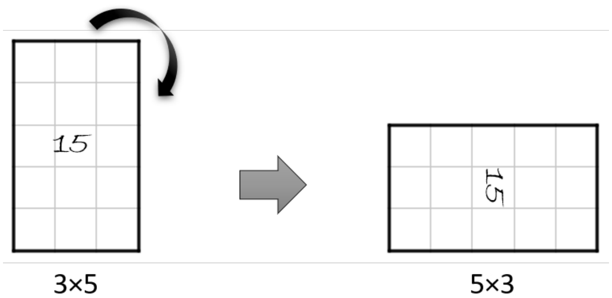

Figura 5
Esempio di rotazione di un rettangolo che può essere associato alla proprietà commutativa.

Basandosi su questo tipo di analisi del potenziale semiotico è stata progettata e implementata una sequenza didattica. Agli studenti è stato chiesto di confrontarsi con diversi compiti utilizzando questi artefatti (la tabella e i rettangoli di carta). Il docente ha organizzato discussioni collettive per sviluppare il significato relazionale delle proprietà della moltiplicazione, partendo dall'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto rispetto ai compiti proposti. Di seguito vengono utilizzati estratti della discussione per esemplificare le azioni del docente.

Costruzione congiunta di segni condivisi
È possibile definire due azioni complementari relative all'obiettivo di far emergere segni personali in riferimento dell'esperienza comune con l'artefatto. Le indichiamo come azione di *ritorno al compito* e azione di *focalizzazione*.
Il primo passo cruciale nel processo di mediazione semiotica consiste nel promuovere l'emergere dei segni relativi all'utilizzo dell'artefatto, quindi una prima classe di situazioni può essere caratterizzata dalla necessità di promuovere la produzione di segni da parte degli studenti. In generale, questa necessità si presenta all'inizio della discussione in classe, ma potrebbe anche presentarsi in seguito: per esempio, quando gli interventi degli studenti non contribuiscono più adeguatamente ad alimentare la discussione di classe. In breve, in tutti quei momenti in cui la produzione di segni

dovrebbe cominciare o ricominciare si richiede l'intervento intenzionale ed esplicito del docente atto a

- provocare la produzione personale di segni da parte degli studenti in relazione all'utilizzo dell'artefatto;
- costruire un contesto condiviso per questi segni attraverso l'evocazione del contesto di utilizzo dell'artefatto;
- ottenere contributi da tutti gli studenti nel massimo numero possibile.

Chiamiamo questo tipo d'intervento azione di *ritorno al compito*.

I punti elencati sopra sono tra loro correlati e le azioni del docente sono spesso volte al raggiungimento di tutti questi obiettivi simultaneamente, anche se di volta in volta uno può prevalere sugli altri.

Un intervento tipico potrebbe essere «Chi vuole raccontare che compito è stato proposto? Come avete fatto a svolgerlo? Cosa chiedeva di fare?».

L'azione di ritorno al compito è considerata efficace se provoca numerosi interventi, però non tutti gli elementi che emergeranno potrebbero essere correlati al potenziale semiotico; questo richiede di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati che vengono condivisi, quegli aspetti cioè che possono portare allo sviluppo dei segni matematici che costituiscono l'obiettivo educativo. In tutti quei momenti nei quali si richiede di mettere a fuoco aspetti specifici, si rende necessario un intervento intenzionale del docente, con lo scopo di

- metter a fuoco segni specifici (condivisi) prodotti fino ad un certo momento;
- selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di questi segni (condivisi);
- circoscrivere il riferimento di determinati segni a specifici aspetti dell'uso dell'artefatto;
- supportare gli studenti nella presa di coscienza di questi aspetti chiave.

Chiamiamo questo tipo d'intervento azione di *focalizzazione*.

In breve, l'obiettivo è di evidenziare e limitare una parte dell'esperienza comune degli studenti con l'artefatto, in relazione al suo potenziale semiotico. In questo caso spesso vengono osservati gesti che talvolta simulano aspetti specifici dell'uso dell'artefatto.

Di seguito presentiamo brevi estratti di una discussione collettiva per illustrare l'intrecciarsi di interventi appartenenti alle due categorie appena descritte. L'estratto che segue è tratto da una discussione che si è svolta dopo un'attività proposta per introdurre la proprietà commutativa della moltiplicazione.

Agli studenti è stato chiesto di scegliere una casella nella tavola di Laisant e di colorarla, successivamente è stato chiesto loro di preparare un pezzo di carta della stessa forma e dimensione. Ogni bambino aveva la sua copia della tavola di Laisant, carta e forbici. Dopo aver realizzato il rettangolo di carta, ad ogni bambino è stato chiesto di cercare una casella all'interno della tavola di Laisant alla quale il rettangolo di carta si sovrapponesse perfettamente. Gli studenti muovevano i loro rettangoli di carta sulla loro copia della tavola di Laisant e una volta trovata la casella corretta, la coloravano. Ovviamente, ci sono due caselle differenti che corrispondono a ciascun rettangolo: quella scelta inizialmente dallo studente e la sua simmetrica, che corrisponde alla stessa moltiplicazione con l'ordine dei fattori invertito. I quadrati costituiscono un'eccezione in quanto appaiono una sola volta nella tavola. La stessa procedura è stata ripetuta due volte, ogni volta partendo da una casella diversa.

Quando tutti i bambini hanno finito il proprio lavoro, il docente ha chiesto loro di condividere quello che hanno notato a proposito della posizione delle due caselle colorate.

Estratto 1

1. Ins.: Avete scoperto qualcosa? Chi vuole dire cosa ha scoperto? [Siro alza la mano] Ok, dicci tutto.
2. Siro: Le due gemelle sono nella stessa posizione. Due sono in alto e due sono a sinistra. Sono nella posizione perché se giri il foglio diventa all'incontrario. Questo è il mio. Questo è quello che c'è sulla mia tabella.
3. Ins.: Ok! Partiamo da quest'idea. Siete tutti d'accordo che quando si gira il foglio, tutte le caselle vanno nella stessa posizione?
4. Molti studenti: No.
5. Ins.: Date un'occhiata alla vostra tabella. Siro dice che se girate il foglio, poi le gemelle vanno nella stessa posizione.
6. Siro: Be', se lo giro così [gira il foglio] diventa… questa qua!

Il docente comincia la discussione chiedendo ai bambini cosa hanno scoperto (linea 1). Secondo la nostra categorizzazione, questo intervento può essere classificato come *ritorno al compito*. Infatti, questa è una domanda molto generica, atta a stimolare interventi da parte degli studenti sul proprio lavoro, promuovendo così la produzione di segni personali legati all'attività svolta con l'artefatto. Questo obiettivo viene subito raggiunto grazie a Siro, che usa la parola "gemelle" (linea 2) per riferirsi ad una coppia di caselle colorate. Questa parola non ha un significato condiviso e viene proposta in questo momento, da questo bambino, per la prima volta. Siro descrive anche la posizione assoluta delle caselle nella sua tavola e le mette in relazione attraverso l'azione di girare il foglio (linea 2). Forse questa è un'azione che ha svolto mentre eseguiva il compito.
Dopo l'intervento di Siro, il docente decide di attirare l'attenzione degli studenti su quanto è stato detto e *focalizza* l'attenzione degli allievi sull'idea di girare il foglio. Infatti, il docente ripete parte delle parole dello studente. In particolare, le parole "gira" (linea 3) e "gemelle" (linea 5) vengono 'rispecchiate'. In entrambi i casi, sembra che il docente riconosca il potenziale semiotico di queste parole rispetto al significato matematico della proprietà commutativa che rappresenta l'obiettivo del suo intervento didattico. Infatti, la parola "gira" potrebbe riferirsi all'inversione dei fattori nella moltiplicazione, mentre la parola "gemelle", riferita alle caselle, esprime il fatto che le due caselle colorate hanno le caratteristiche comuni e si corrispondono quando si gira il foglio.
Comunque, visto che, nonostante la riformulazione da parte dall'insegnante, gli altri bambini (linea 4) non sembrano convinti dall'intervento di Siro, l'insegnante chiede agli studenti di guardare le loro tabelle (linea 5); in altre parole, agli studenti viene chiesto di tornare a quello che hanno fatto mentre svolgevano il compito. Questo spinge Siro a svolgere nuovamente l'azione di girare il foglio, mostrandola ai suoi compagni (linea 5).
Questo breve estratto mostra come, con la combinazione delle due azioni ritorno sul compito e *focalizzazione*, l'insegnante inneschi il primo passo nella costruzione di un contesto condiviso per i segni proposti da Siro (le parole "girare" e "gemelle"), attraverso l'evocazione dell'uso dell'artefatto.

Verso i segni matematici

Come detto in precedenza, il ritorno al compito e la focalizzazione sono due tipi d'intervento complementari: il primo intende sfruttare la ricchezza semantica relativa al contesto dell'artefatto, mentre il secondo può essere usato per focalizzare

l'attenzione su significati specifici che possono essere messi in relazione con il significato matematico atteso.
L'utilizzazione, ripetuta e alternata, di questi due tipi di azione, è in grado di favorire la costruzione di una rete di segni condivisa, segni che da un lato sono legati all'uso dell'artefatto, ma che dall'altro conservano quegli elementi chiave del loro significato che sono pertinenti rispetto allo sviluppo dei segni matematici che si vogliono introdurre.
Tuttavia, l'evoluzione verso i segni matematici attesi richiede ulteriori interventi per raggiungere la decontestualizzazione dei segni prodotti in relazione all'artefatto e al suo utilizzo, e la corretta caratterizzazione matematica. Due altri tipi d'intervento possono essere sfruttati per ottenere quest'evoluzione: *la richiesta di una sintesi* e *l'offerta di una sintesi*.
L'emergere del potenziale semiotico – che è l'emergere di segni stabili e condivisi che condensano gli aspetti chiave relativi sia all'artefatto e all'esperienza del suo utilizzo, sia alla matematica evocata da tale utilizzo – richiede l'intervento dell'insegnante per promuovere la necessità di generalizzare e di decontestualizzare i significati emersi. Il processo di generalizzazione e decontestualizzazione dei significati non può però limitarsi a una semplice sostituzione dei segni prodotti (per esempio il verbo "girare" riferito alle celle) con il segno matematico appropriato ("inversione di fattori"). I nuovi segni devono essere costruiti e condivisi, guadagnando in questo modo un significato prettamente matematico, seppur mantenendo allo stesso tempo gli aspetti chiave relativi alla loro origine. Per esempio, ci aspettiamo che la dinamica intrinseca di ruotare il rettangolo di carta rimanga come componente del significato matematico della proprietà commutativa, nonostante la sua definizione matematica non includa esplicitamente un riferimento al movimento di rettangoli. Quest'evoluzione consiste in un complesso processo semiotico che richiede l'intervento diretto del docente, con l'obiettivo di

- promuovere la decontestualizzazione dall'uso dell'artefatto;
- promuovere la generalizzazione rispetto ai compiti specifici;
- mantenere in entrambi i processi precedenti (decontestualizzazione e generalizzazione) quegli aspetti dei significati personali riconosciuti come pertinenti ai segni matematici da acquisire.

Un processo semiotico così complesso può essere promosso dall'intervento dell'insegnante chiedendo agli studenti di riassumere quello che è stato discusso fino a quel punto o chiedendo loro cosa considerano come condiviso fra quanto emerso dalla discussione collettiva. Chiamiamo questo tipo d'intervento *richiesta di sintesi*. Infatti, chiedere una sintesi non solo induce gli studenti a rendere espliciti i significati personali, ma li induce anche a condensare esperienze diverse in un'unica frase, e questo può portare a cercare aspetti comuni, favorendo la generalizzazione. Inoltre, le sintesi prodotte durante una discussione collettiva tendono a riprendere i segni emersi in precedenza, ma possono anche includere i segni matematici già in uso o introdotti recentemente dall'insegnante. In altre parole, condividere le proprie idee personali attraverso una sintesi rappresenta lo spazio interpersonale nel quale l'insegnante può introdurre il punto di vista matematico, ed eventualmente, la terminologia standard. L'estratto seguente offre esempi di queste azioni.

Estratto 2

55. Ins.: Marco è venuto alla lavagna e ha scritto il numero 15 in queste due caselle gemelle [indica le caselle 3×5 e 5×3].

56. Siro: Sì! Perché sono gemelle!
57. Ins.: Quindi le caselle gemelle hanno sempre lo stesso numero?
58. *Molti studenti dicono “sì”, mentre altri dicono “no”.*
59. Ins.: Sì o no?
60. Molti studenti: Sì!
61. Ins.: Provo con un esempio. Qui ho 1, 2, 3 [conta i quadrati lungo un lato della casella 3×4, che sulla sua tabella è colorata] in orizzontale e 1, 2, 3, 4 in verticale. Che numero devo mettere?

L’estratto comincia con l’insegnante che focalizza su quanto fatto da uno degli studenti e lo mette in relazione con il nuovo segno “gemelle”: Marco (linea 55), scrive il numero 15 all’interno delle due “caselle gemelle” 3×5 e 5×3. Questa focalizzazione spinge Siro ad accorgersi che questo dipende dalla natura stessa dell’essere gemelle (linea 56). Alla linea 57, il docente pone una domanda che non si riferisce più unicamente alle caselle 3×5 e 5×3, ma a tutte le coppie di caselle gemelle. Così facendo, promuove la generalizzazione mettendola in relazione all’esempio specifico. Questo può essere descritto come un caso di richiesta di sintesi. Ciò nonostante, quest’azione dell'insegnante non produce gli effetti sperati; infatti, non tutti gli allievi concordano su questo fatto (linea 58). Quindi l’insegnante invita i bambini a tornare al compito (linea 61). Un’efficace richiesta di sintesi può portare alla produzione di spiegazioni generali o decontestualizzate, anche se queste non sono ancora completamente espresse in termini matematici.
Quando nella discussione il processo di decontestualizzazione e di generalizzazione a partire dai significati emersi dal contesto di utilizzo dell’artefatto si attiva ma non può ancora considerarsi completo, l’insegnante può intervenire con un’offerta di sintesi, facendo esplicito riferimento al contesto matematico e ai suoi significati, con lo scopo di:
– rendere esplicite le relazioni tra significati matematici e significati costruiti attraverso la discussione di classe;
– introdurre i segni matematici desiderati e fornire una formulazione matematica;
– confermare l’accettabilità e il valore matematico di un segno specifico.
L’estratto seguente mostra un esempio di offerta di sintesi da parte dell’insegnante.

Estratto 3

43. Ins.: Ok, quindi: Nico dice che non è vero per tutte le caselle perché i quadrati non hanno gemelli.
44. Siro: Infatti, non ho detto “tutte”, ho detto solo quelle.
45. Ins.: Quelle che sono da questa parte.
46. Fabio: Tutte le caselle sono specchi. Questa [indica la casella 5×5] riflette questa e questa, questa e questa [indica tutte le caselle “gemelle” nella quinta riga e colonna] mentre questa [indica la casella 4×4] riflette questa, questa, questa e questa [indica le coppie di celle nella quarta riga e colonna].
47. Ins.: Sta dicendo che tutti i quadrati sono specchi.

In questo estratto possiamo vedere come il processo di generalizzazione stia procedendo attraverso la discussione sull’accettabilità della proprietà per tutte le caselle di “avere una gemella”. All’inizio, l’insegnante si concentra sull’espressione di Nico (linea 43) e questo stimola un intervento di Fabio. Secondo lui tutte le caselle sono specchi (linea 46), ma poi si limita a indicare i quadrati per dire che riflettono le caselle che sono nella stessa riga/colonna. A questo punto, l’insegnante fornisce una

sintesi (linea 47), reinterpretando le parole di Fabio, introducendo il segno matematico desiderato (quadrato) e in questo modo confermando l'accettabilità matematica delle parole di Fabio. Possiamo notare che questa non è una affermazione puramente matematica perché ci sono ancora dei riferimenti al contesto dell'artefatto, ciò nonostante il processo di decontestualizzazione è cominciato e i segni matematici appropriati sono stati introdotti; ora il processo deve continuare.
Questo evidenzia due aspetti interessanti: da un lato, l'offerta di una sintesi non intende fermare il processo di mediazione semiotica, ma può costituire una tappa intermedia nell'evoluzione fornendo esempi di decontestualizzazione e generalizzazione; dall'altro lato, la complessità del processo di mediazione semiotica, coinvolgendo sia la sfera individuale sia quella collettiva, richiede una continua alternanza di richieste e offerte di sintesi da parte del docente.

6 Conclusioni

Secondo la TMS l'utilizzo didattico di un artefatto ha una duplice funzione: in primo luogo viene usato direttamente dagli studenti come mezzo per portare a termine un compito; in secondo luogo è utilizzato indirettamente dall'insegnante come mezzo per raggiungere specifici obiettivi educativi, per esempio la costruzione di un sapere matematico. Il nostro contributo si è focalizzato sul ruolo specifico del docente nella gestione del processo d'insegnamento e apprendimento. Nello specifico, abbiamo indirizzato la nostra attenzione a una particolare fase dell'organizzazione didattica generale - la fase della discussione collettiva – mettendo in evidenza possibili schemi nelle modalità di interazione tra insegnante e studenti.
Dopo l'analisi di numerose discussioni collettive, abbiamo identificato possibili categorie di azioni, che ci hanno portato ad una categorizzazione esplicita delle possibili modalità d'intervento dell'insegnante mirate a guidare il processo semiotico centrato sull'utilizzo di un artefatto. In particolare, le due coppie di azioni complementari presentate sopra, descrivono come, durante una discussione collettiva, l'insegnante possa favorire sia la costruzione collettiva di segni condivisi, sia la loro evoluzione verso i segni matematici attesi.
Questo modello d'azione dell'insegnante mette in luce specifiche forme di mediazione legate al processo d'insegnamento e di apprendimento e ad elementi specifici riguardanti la gestione della discussione di classe. Inoltre, chiarisce cosa ci si aspetta dall'insegnante per rendere l'artefatto funzionale alla mediazione semiotica. La caratterizzazione esplicita delle possibili azioni dell'insegnante rende possibile la loro comunicazione e condivisione nella comunità dei docenti, contribuendo così al loro sviluppo professionale su questa tematica, in particolare indirizza l'attenzione sull'importanza della consapevolezza del docente sul proprio ruolo e sulle scelte che deve prendere durante le discussioni in classe.

Bibliografia

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*, 267–299

Barab, S., & Squire, B. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. Disponibile in http://website.education.wisc.edu/kdsquire/manuscripts/jls-barab-squire-design.pdf (consultato il 21.07.2018).

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic Mediation In The Primary School: Dûrer's Glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity And Sign – Grounding Mathematics Education* (Festschrift For Michael Otte) (pp. 77-90). New York, USA: Springer.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Springer.

Cerulli, M. (2004). *Introducing pupils to Algebra as a Theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*, Ph.D Thesis in Mathematics, Università di Pisa, Scuola di Dottorato in Matematica.

Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 275-293.

Cummins, J. (1996). *Negotiating identities: Education for empowerment in a diverse society*. Ontario, CA: California Association of Bilingual Education.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2004). Towards a definition of function. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 367–374). University of Norway, Bergen (Norvegia).

Falcade, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collective, dans des sequences d'ensignament avec Cabri- Géomètre por la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Grenoble: Université J. Fourier: Unpublished doctoral dissertation.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 1-17). NATO ASI Series, New York, USA: Springer.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & S. M. Miller, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (pp. 15 -38). Cambridge University Press.

Maffia, A. (2017). *Insegnamento e apprendimento di fatti moltiplicativi: un approccio relazionale mediante la tavola di Laisant*. Unpublished doctoral dissertation.

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete, 16*(1), 4-19.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique: une ressource pour l'enseignant. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, Dordrecht: Kluwer, *6*(3), 257-281.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Moschkovich, J. (2003). What Counts as Mathematical Discourse?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 325-332.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). New York, USA: Springer.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37–70.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Autori/Maria Alessandra Mariotti* e Andrea Maffia•
*Università di Siena, Italia
•Università di Bologna, Italia
mariotti21@unisi.it, andrea.maffia2@unibo.it

Traduzione di Carlo Mina